

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
卷人											

注意: 答题时应注明题号, 并按题号顺序答题。

题号 P36 答题内容 廖国勇 2016.10.9

1 设 $f'(1) = 2$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1-x)}{x}$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+2x) - f(1)}{2x} \cdot 2 + \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{f(1+2x) - f(1)}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} \\ &= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1) = 6 \end{aligned}$$

注, 导数的定义要好好理解。也可以用特殊函数来做

例如选取 $y = f(x) = 2x$, 显然有 $f'(1) = 2$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+2x) - 2(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x} = 6$$

用特殊函数做填空题, 选择题是一个不错的方法。

2 曲线 $xy = 6$ 在点 $(2, 3)$ 处的切线方程为什么

解: 由 $xy = 6$ 得 $y = \frac{6}{x}$, $y' = -\frac{6}{x^2}$

$$k_{\text{切}} = y'|_{x=2} = -\frac{6}{2^2} = -\frac{3}{2}$$

所以切线方程为

$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$$

$$\text{整理得 } 3x + 2y - 12 = 0$$

题号

P36

答 题 内 容

廖国勇 2016.10.9

3 设 $y = xe^{-x}$, 则 $y' = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

4 设 $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$, 则 y'

解: $y' = \frac{(1-\ln x)'(1+\ln x) - (1-\ln x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}$

$$= \frac{1}{(1+\ln x)^2} \cdot \left[-\frac{1}{x}(1+\ln x) + \frac{1}{x}(1-\ln x)(-1) \right]$$

$$= \frac{1}{(1+\ln x)^2} \cdot \left(-\frac{2}{x} \right) = \frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$$

5 设 $y = f(1-x^2)$, 则 $y' =$

解: $y' = f'(1-x^2) \cdot (-2x) = -2xf'(1-x^2)$

二 1 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 求 $f'(x)$ 及 $f'(\frac{\pi}{3})$

解: $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

2 设 $y = \arccot \frac{x-1}{x+1}$, 求 y'

解: $y' = -\frac{1}{1+(\frac{x-1}{x+1})^2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)'$

$$= -\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{1+x^2}$$

3. 设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$, 求 y'

$$\text{解: } y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

4. 设 $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$, 求 y'

$$\text{解: } y' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(\sin \frac{2}{x}\right) \left(e^{\sin^2 \frac{1}{x}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

5. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 的连续性与可导性

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 0 = f(0)$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 \Delta x}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 1$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

6. 设曲线 $f(x) = x^{2n}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线交 x 轴于点 $(x_n, 0)$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

$$\text{解: 由导数的几何意义, } k_{\text{切}} = \frac{0-1}{x_n-1} = f'(1) = 2n x^{2n-1} \Big|_{x=1} = 2n$$

$$\Rightarrow x_n = 1 - \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{(-2n) \cdot (-1)} = e^{-1}$$

二 7 求曲线 $y = \frac{x^4+b}{x}$ 上切线斜率为 -3 处的切线方程

解: $y = \frac{x^4+b}{x} = x^3 + \frac{b}{x}$ $y' = 3x^2 - \frac{b}{x^2}$

由 $y' = 3x^2 - \frac{b}{x^2} = -3 \Rightarrow x = -1$ 或 $x = 1$

$\Rightarrow$ 切点坐标 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$

在 $(-1, -7)$ 处的切线方程 $y+7 = -3(x+1)$, 即 $3x+y+10=0$

在 $(1, 7)$ 处的切线方程 $(y-7) = -3(x-1)$ 即 $3x+y-10=0$

8 设 $f(x) = \begin{cases} ax+b & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导, 求 a, b

解: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 所以 $f'_+(0) = f'_-(0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax+b-0}{x} \Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax+b}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

9 讨论函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{2+x^2+e^{tx}}$ 的可导性, 并求可导处的导数

解:

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{2+x^2+e^{tx}} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \frac{x}{2+x^2} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{2+x^2} - 0}{x} = \frac{1}{2} \neq f'_-(0)$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

在 $x > 0$ 时, $f'(x) = 0$

$$\text{在 } x < 0 \text{ 时, } f'(x) = \left(\frac{x}{2+x^2} \right)' = \frac{(2+x^2) - x \cdot 2x}{(2+x^2)^2} = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

题号

B9

答 题 内 容

廖国勇 2016.10.9

二 10 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$, 求 $f'(0)$.

$$\text{解: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)\cdots(x-100)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x-2)\cdots(x-100) = 100!$$

11 设 $f(x)$ 可导, 且 $g(x) = [f(x)]^3 e^{f(x)}$, 求 $g'(x)$

$$\begin{aligned} \text{解: } g'(x) &= 3[f(x)]^2 \cdot f'(x) e^{f(x)} + [f(x)]^3 \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) \\ &= f^2(x) \cdot f'(x) e^{f(x)} [3 + f(x)] \end{aligned}$$

三 1 设 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 证明 $f'(0) = 0$

$$\text{证明: } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0} (-1) = -f'_-(0)$$

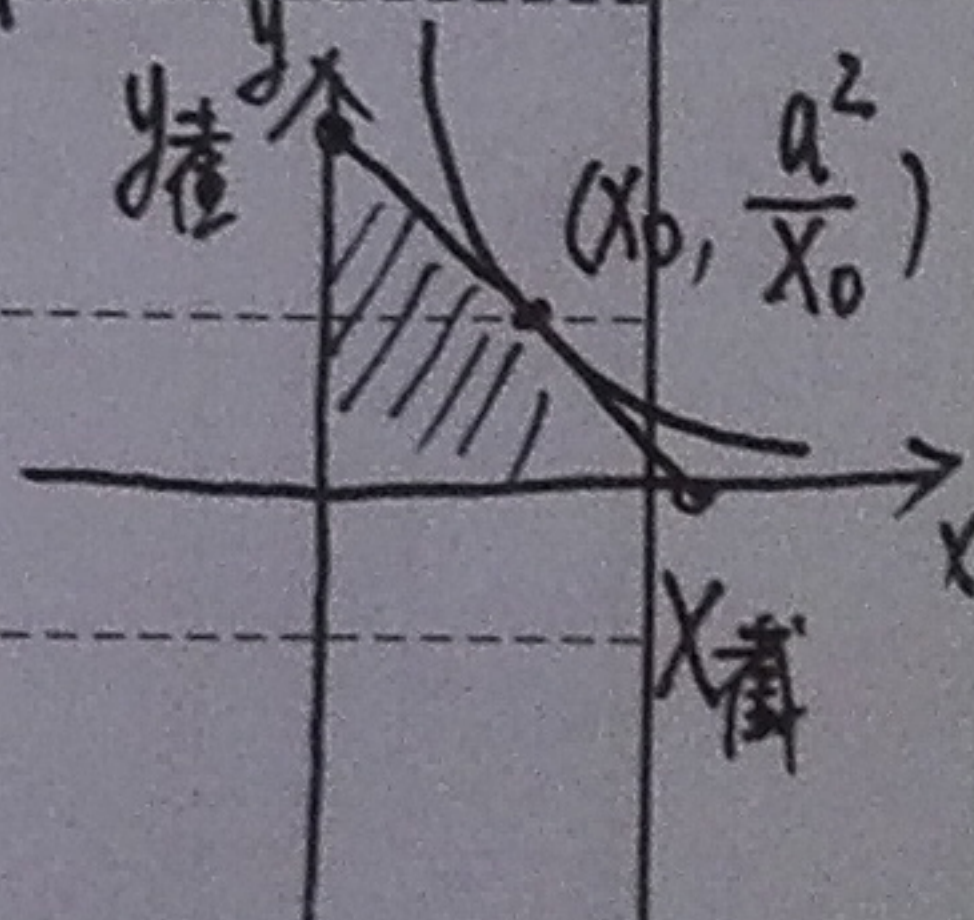
$$f'(0) \text{ 存在, 则 } f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0)$$

$$\text{所以 } f'(0) = 0$$

2 证明曲线 $xy = a^2$ 上任意一点处的切线与两坐标轴构成三角形的面积为常数。

证明: 设 $(x_0, \frac{a^2}{x_0})$ 为曲线上任一点, 该点切线交 x 轴于 $x_{\text{截}}$, 交 y 轴于 $y_{\text{截}}$, 由 $xy = a^2 \Rightarrow y = \frac{a^2}{x} \Rightarrow y' = -\frac{a^2}{x^2}$ 知

$$\begin{cases} \frac{y_{\text{截}} - 0}{0 - x_{\text{截}}} = y'|_{x=x_0} = -\frac{a^2}{x_0^2} \\ \frac{y_{\text{截}} - \frac{a^2}{x_0}}{0 - x_0} = y'|_{x=x_0} = -\frac{a^2}{x_0^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{截}} = \frac{a^2}{x_0} \\ y_{\text{截}} = \frac{2a^2}{x_0} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_{\text{截}} = 2x_0 \\ y_{\text{截}} = \frac{2a^2}{x_0} \end{cases} \therefore \text{三角形面积} = \frac{1}{2} |x_{\text{截}} \cdot y_{\text{截}}| = 2a^2 = \text{常数}$$

题号

答题内容

廖国勇 2016.10.9

P40

3

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 可导, 证明: $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

证明:

$$[u(x)v(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} u(x)$$

$$= u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$